# 速度型 Space-Time 有限要素法を用いた一次元接触問題の定式化
# Formulation of one-dimensional contact problem by velocity-based Space-Time FEM

○築山秀明*・友部　遼**・藤澤和謙*・村上　章*
TSUKIYAMA Hideaki・TOMOBE Haruka・FUJISAWA Kazunori・MURAKAMI Akira

## 1. はじめに

地震応答解析では，空間方向に有限要素法を，時間方向には差分法を用いるのが一般的である．しかし，この手法では 2 次の精度の結果しか得ることができないという課題がある．当研究室では，この課題を解決するために速度型 Space-Time 有限要素法(v-ST/FEM)を提案した．v-ST/FEM は, 線形弾性体を対象にして 3 次以上の精度と安定性が示されおり（Sharma et al, 2018），ロックフィルダムの地震応答解析においても適用可能であることが確認されている．しかし，従来の v-ST/FEM を用いた地震応答解析は，ゾーン間や堤体と付帯構造物のせん断，剥離を表現できなかった．異種材料の接触面は脆弱部となる危険性があることから，実際の農業水利施設の地震応答解析においては，接触面の力学挙動特性を再現できることが望ましい．そこで，v-ST/FEM を用いた地震応答解析に接触面の解析を導入することを目的とし，本論では，最も単純な一次元接触問題を対象に v-ST/FEM による定式化を行った．

## 2. 速度型 Space-Time 有限要素法

v-ST/FEM は，速度のみを未知数$v(x,t)$として扱い，空間方向だけでなく時間方向にも有限要素法を用いる手法である．同手法では，図 1 のように時間ステップの区切り$t^n$において未知数は不連続と仮定し，$t^n$，$t^{n+1}$での変数 $v$ の値を離散化する．ここで，$v^{n+}$，$v^{n-}$をそれぞれ以下のように定義する．

$$v^{n+}=\lim_{\delta\to\infty} v(x,t^n+\delta),\ v^{n-}=\lim_{\delta\to\infty} v(x,t^n-\delta) \tag{1}$$

また，未知数$v(x,t)$の離散化は次のように行う．

$$v=v_i^j N_i T^j \tag{2}$$

ここで，$i$=1,…,$n_s$，$j$=1,…,$n_t$であり，$N_i$，$T^j$はそれぞれ空間，時間に関する形状関数，$n_s$は各要素の節点数，$n_t$は時間方向の節点数である．

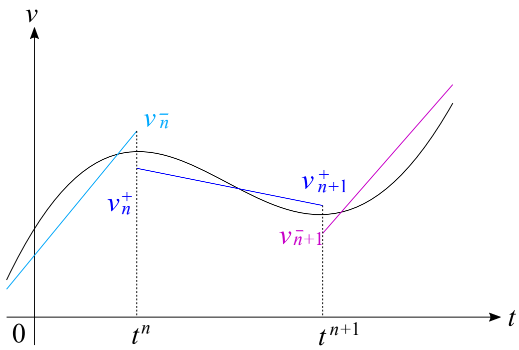


図 1　時間方向の離散化

Fig. 1. Discretization in time direction

## 3. 一次元接触問題の定式化

図 2 に示すような二つの線形弾性体の接触問題について考える．時刻$t$ ($t^n \le t \le t^{n+1}$)における全ポテンシャルエネルギー$\pi_d(v)$は以下の式で表される．一次元のため物体力は考慮しない．

$$\pi_d(v)=\sum_{A=1}^{2}\left[\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{L_e} v\left(\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)dx\,dt\right] \tag{3}$$

ここで，$L_e$は各弾性体の長さ，$\sigma$は応力，$\rho$は密度，$A$は弾性体の数である．また，制約条件は式(4)で表される．

$$g(u)=g_0-(u_s-u_m)\ge 0 \tag{4}$$

*京都大学大学院農学研究科　Graduate School of Agriculture, Kyoto University
**東京工業大学環境・社会理工学院　School of Environment and Society, Tokyo institute of Technology

ここで，$g_0$は初期ギャップ，$u_s, u_m$はそれぞれ各接触面の変位である．また，時刻$t$ ($t^n \leq t \leq t^{n+1}$)における変位$u$ は速度$\boldsymbol{v}$ を用いて式(5)で表される．

$$u=u^n+\int_{t^n}^{t} v\,dt \tag{5}$$

ここで，$u^n$は$t=t^n$における変位である．式(4)，(5)より，制約条件は以下の式で表される．

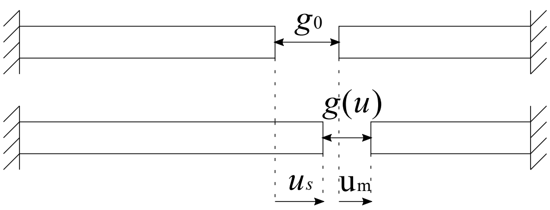


図 2　一次元接触問題

Fig. 2. One-dimensional contact problem

$$g(v)=g_0\text{-}u_s^n+u_m^n\text{-}\int_{t^n}^{t} v_s\text{-}v_m\,dt \geq 0 \quad (t^n \leq t \leq t^{n+1}) \tag{6}$$

以上より，v-ST/FEM を用いた接触問題は，制約条件である式(6)のもと式(3)の目的関数を最小化する問題に帰着する．ペナルティ法を用いて式(7)で表される拡張目的関数を最小化する．ここで，$\epsilon$は 0 以上の正の数であるペナルティパラメータとする．

$$\pi(v)=\pi_d(v)+\frac{\epsilon}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \{\min(0,g(v))\}^2\,dt \quad (\epsilon>0) \tag{7}$$

非接触時，$g(v)>0$となるので，$\pi(v)=\pi_d(v)$である．以下，接触時の定式化を行う．この拡張目的関数の速度 $v$ を，式(2)を用いて離散化し，以下のように離散化した$\boldsymbol{v}$で偏微分をとる．

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}=\frac{\partial\pi_d(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}+\epsilon\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(\boldsymbol{v})\frac{\partial g(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}=0 \tag{8}$$

式(8)を整理すると，以下の式が得られる．

$$\{[\boldsymbol{A}]\text{-}\epsilon[\boldsymbol{C}_1]\}\{\boldsymbol{v}\}=\{\boldsymbol{b}\}+\epsilon\{\boldsymbol{C}_2\} \tag{9}$$

式(9)中の$[\boldsymbol{A}]$は全体剛性マトリクス，$\{\boldsymbol{b}\}$は全体外力ベクトル，$\{\boldsymbol{v}\}$は求める未知数である．

$$\{\boldsymbol{v}\}^T=\left\{v_{x_1}^{n+},v_{x_2}^{n+},v_{x_n}^{n+},v_{x_1}^{n+1\text{-}},v_{x_2}^{n+1\text{-}},\cdots,v_{x_n}^{n+1\text{-}}\right\} \tag{10}$$

ここで，$x_n$は総節点数である．また，$[\boldsymbol{C}_1]\{\boldsymbol{v}\},\{\boldsymbol{C}_2\}$はそれぞれ接触に関する全体ベクトルであり，以下に示す各接触節点における要素ベクトル$[\boldsymbol{C}_{1e}]\{\boldsymbol{v}_c\},\{\boldsymbol{C}_{2e}\}$より得られる．

$$[\boldsymbol{C}_{1e}]=\int_{t^n}^{t^{n+1}} [\boldsymbol{N}]_C^T\,[\boldsymbol{N}]_C dt \tag{11}$$

$$\{\boldsymbol{C}_{2e}\}=\int_{t^n}^{t^{n+1}} [\boldsymbol{N}]_C^T\left(g_0\text{-}u_s^n+u_m^n\right)dt \tag{12}$$

$$\{\boldsymbol{v}_c\}^T=\left\{v_{x_s}^{n+} \quad v_{x_s}^{n+} \quad v_{x_m}^{n+1\text{-}} \quad v_{x_m}^{n+1\text{-}}\right\} \tag{13}$$

$$[\boldsymbol{N}]_C=\int_{t^n}^{t}\left[-T^1 \quad T^1 \quad -T^2 \quad T^2\right]dt \tag{14}$$

## 4.　まとめ

本論では線形弾性体の一次元接触問題を対象に定式化を行った．本来，制約条件が変位の関数となる点が，v-ST/FEM を用いて接触問題の定式化を行う際の課題であったが，増分型の変位-速度関係を利用することにより，制約条件も速度の関数とすることができた．また，制約条件付き最小化問題を解く際，未知数が増加しないペナルティ法を採用することにより，速度のみを未知数とする v-ST/FEM の特徴を維持しつつ，接触項を導出することが可能となった．


**参考文献** 1) Sharma, V., Fujisawa, K. and Murakami, A. (2018) Velocity-based time discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics, *Soils and Foundations,* Vol.58, pp. 491-510.